Revista de Investigación en Educación, nº 12 (2), 2014, pp. 209-221
http://webs.uvigo.es/reined/
ISSN: 1697-5200
eISSN: 2172-3427

ARTÍCULO ORIGINAL

Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones

Tomás Ortega
ortega@am.uva.es

Cristina Pecharromán
pecharromang@am.uva.es

Universidad de Valladolid

RESUMEN. En este artículo se presentan algunos errores que manifiestan los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones a través de sus gráficas, y se hace una clasificación de éstos según que los alumnos van adquiriendo los conceptos a través de los estadios de aprendizaje. Estos estadios llevan asociados unas acciones de aprendizaje caracterizadas en el marco del Enfoque Lógico Semiótico que son las que nos permiten identificar tales errores.

PALABRAS CLAVE. Errores, Aprendizaje, Acciones, Propiedades, Funciones, Gráficas, Estadios

Errors in the learning process of the global properties of functions

ABSTRACT. This article deals with certain errors students make in the teaching-learning process of functions based on graphs. The errors are classified in the order in which students acquire the concepts in different stages of learning. Said stages are associated with learning actions characterized in the logical / semiotic framework, which allows us to identify the errors.

KEY WORDS. Errors, Learning, Actions, Properties, Functions, Graphs, Stages

Investigación Subvencionada por el Proyecto I+D+I de referencia EDU 2009.12063

Fecha de recepción 07/10/2013 · Fecha de aceptación 06/10/2014
Dirección de contacto:
Tomás Ortega
Facultad de Educación y Trabajo Social
Campus Miguel Delibes. Universidad de Valladolid.
Paseo Belén, 1. 47011 - VALLADOLID.

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones que se han realizado sobre los errores de matemáticas y las posibles causas que los producen han sido objeto de atención desde la segunda mitad del S. XX y según de Lansderre (1992), ya Durrell, en 1955, dio una serie de posibles causas de los errores asociadas a dificultades de aprendizaje; otra explicación es dada por Bachelard (1976) a través del concepto de obstáculo epistemológico (línea seguida por Brousseau, 1983). Otros autores

(Radatz, 1979; Movshovit-Hadar, Zaslavksi e Inbar, 1987; Astolfi, 1999,…) realizan clasificaciones de los errores atendiendo a posibles causas generales (lenguaje, aprendizaje deficiente, fallos de inferencias, hábitos escolares, concepciones alternativas,…); Mulhern (1989) enumera las características comunes de los errores detectados por otros investigadores; y, finalmente, Socas (1997 y 2007) atribuye los errores a las dificultades de aprendizaje de los alumnos y los asocia a: los procesos de pensamiento matemático, a la complejidad y dificultades de los objetos matemáticos, a los procesos de enseñanza, al desarrollo cognitivo y a actitudes afectivas; Rico (1995) afirma que en el aprendizaje de la matemática se producen errores sistemáticos y que las causas que producen estos errores de aprendizaje y ellos mismos deben ser estudiados en la formación profesional del profesor de matemáticas.

En todas estas investigaciones se hace un tratamiento de los errores desde perspectivas muy amplias, pero en ningún caso se describen errores de los alumnos producidos en el aprendizaje de los conceptos siguiendo una metodología de enseñanza significativa basada en estadios y acciones de aprendizaje. Así pues, el objetivo de este artículo es presentar los errores de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones que han sido observados en un amplio estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje de estos contenidos.

En primer lugar se presenta el marco teórico de referencia de la investigación, el marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), que describe cómo tiene lugar el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos por los alumnos (Socas, 2007).

A continuación, se elabora un diseño de enseñanza que considera la estructura del proceso de aprendizaje que propone el marco ELOS, con el fin de facilitar el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Este diseño se organiza en tres estadios y en cada uno de ellos se describen las acciones de aprendizaje concretas que tienen lugar.

Finalmente, se considera la estructura del diseño de enseñanza como referente para clasificar los errores observados en el proceso de aprendizaje de los conceptos y su ubicación en este proceso.

2. MARCO TEÓRICO

Socas (2007) propone el marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) en el que se considera el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos como un proceso de abstracción de los sistemas de representación de dichos conceptos. En dicho proceso, el autor parte del sistema antiguo o conocimiento previo del alumno y distingue y caracteriza tres estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo), de tal manera que los aprendizajes que se alcanzan en un estadio fundamentan los aprendizajes del estadio siguiente.

El autor caracteriza estos estadios a través de acciones de aprendizaje sobre las representaciones de los conceptos. Son acciones de reconocimiento, R, de transformación, T, de conversión, $C\rightarrow$, y de coordinación, $C\leftrightarrow$, con las que se puede describir el proceso de aprendizaje significativo del concepto a través de sus representaciones.

- Semiótico: Los signos nuevos adquieren significado y se definen a partir de los antiguos ya conocidos. Se reconoce el objeto matemático en un sistema de representación semiótico (SRS).

- Estructural: La organización del sistema antiguo contribuye a estructurar el sistema nuevo de símbolos. Se realizan transformaciones del objeto en el anterior SRS y conversiones entre SRS, en las que hay un sistema que el alumno controla y facilita la conversión al otro.

- Autónomo: El sistema nuevo de símbolos adquiere significado en sí mismo. Se dominan diversos SRS para representar el objeto (al menos dos), y se coordinan de forma espontánea.

Siguiendo este modelo, que tiene como referencia el modelo de coordinación de registros de Duval (1993), consideramos que la adquisición de los conceptos matemáticos se alcanzará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático en cuestión.

Esta caracterización del aprendizaje de los objetos matemáticos, nos llevó a plantear un diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones (dominio, recorrido, monotonía, extremos, cortes con los ejes, signo, continuidad, tendencia, periodicidad, simetría y convexidad), estructurado por dichos estadios de desarrollo cognitivo y que evoluciona por acciones sobre las representaciones del concepto, con el fin de favorecer el aprendizaje de los alumnos.

La docencia se llevó a cabo en el curso de 4º ESO. Una vez que se acotaron los contenidos que se iban a impartir, se distribuyeron en los estadios de desarrollo de la siguiente manera:

Estadio Semiótico: Se produce un reconocimiento gráfico del concepto y se expresa un enunciado verbal intuitivo que permite interpretar el concepto en la gráfica de la función. Este estadio se alcanza a partir del conocimiento previo del alumno.

Estadio Estructural: Se reconoce el concepto en las variables de la función, es decir, se refiere al diagrama cartesiano. Para ello, se realizan procedimientos gráficos como el de proyección y se utiliza lenguaje matemático simbólico y numérico para expresar la información.

Estadio Autónomo: Se relacionan las variables de manera que, en algunos casos, la propiedad de la función es independiente del soporte gráfico que ofrece su representación. En primer lugar, se pretende alcanzar el aprendizaje significativo del concepto en su representación gráfica, y, en segundo lugar, se reconoce el concepto en otras representaciones en las que adquiere significado por conversiones que parten de la representación gráfica. Este estadio orienta el desarrollo del concepto como objeto matemático abstracto pero está limitado por el nivel educativo en el que se lleve a cabo la docencia. Por ejemplo, en 4º ESO consideramos un sistema autónomo más amplio del que se consideraría si la docencia se desarrollase en 3º ESO, pues así lo permite el sistema antiguo o conocimiento previo de los alumnos.

La Tabla 1 recoge las acciones de aprendizaje asociadas al aprendizaje de cada concepto y las distribuye por estadio de desarrollo. Son acciones de reconocimiento R, de transformación T, de conversión C→, y de coordinación C↔, en los sistemas de representación: verbal V, gráfico G, numérico N, y algebraico A. Así, por ejemplo, tendríamos un reconocimiento verbal RV; una transformación numérica TN; una conversión del sistema gráfico al algebraico $C_{G\rightarrow A}$;…

	Dom	Rec	Mon	Extr	Cort	Sign	Cont	Tend	Perio	Sim	Curv
RG	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
RV(Apr)	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
RV (Rig)	+	+	+	+	+	+			+	+	
RV(Des)							+	+			+
RN (Tab)			+	+					+	+	
RN (P, I)	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
RA (Part)	+				+	+				+	
RA (Uni)	+	+	+	+	+	+			+	+	
TG	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
TV	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***
TN									+		
TA	+				+	+				+	

$C_{G \rightarrow V(Apr)}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$C_{V(Apr) \rightarrow G}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$C_{G \rightarrow V(Rig)}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{V(Rig) \rightarrow G}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{G \rightarrow V(Des)}$							+	+			+
$C_{V(Des) \rightarrow G}$							+	+			+
$C_{G \rightarrow N(P,I)}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X/+		X
$C_{N(P,I) \rightarrow G}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+
$C_{G \rightarrow A(Uni)}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{A(Uni) \rightarrow G}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{A(Uni) \rightarrow A(Par)}$					+					+	
$C_{V(Rig) \rightarrow A(Par)}$	+					+					
$C_{A(Uni) \rightarrow N(Tab)}$			+	+						+	
$C_{A(Par) \rightarrow N(P,I)}$	+				+	+					
$C_{V(Rig) \rightarrow A(Uni)}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{A(Uni) \rightarrow V(Rig)}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{V(Rig) \rightarrow N(Tab)}$			+	+						+	
$C_{G \leftrightarrow V(Apr)}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$C_{G \leftrightarrow V(Rig)}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{G \leftrightarrow V(Des)}$							+	+			+
$C_{G \leftrightarrow N(P,I)}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+
$C_{G \leftrightarrow A(Uni)}$	+	+	+	+	+	+			+	+	
$C_{V(Rig) \leftrightarrow A(Uni)}$	+	+	+	+	+	+			+	+	

Tabla 1: Asociación de las acciones de aprendizaje a los estadios de desarrollo cognitivo de los conceptos

En la Tabla 1 cada estadio de desarrollo del concepto se ha expresado con un signo:

- Semiótico: X (normal)
- Estructural: X (subrayado)
- Autónomo: + (en negrita)
- La acción Transformación verbal (TV), que se ha descrito con "x", interviene en todos los estadios como complemento del resto de acciones.

Asimismo, se han utilizado abreviaturas con el fin de adaptar su contenido al tamaño de la página. Unas corresponden a los contenidos matemáticos y otras al tipo de acción de aprendizaje. A continuación se escribe la significación de cada abreviatura:

* Abreviaturas de contenido matemático:

- Dom = Dominio
- Rec = Recorrido
- Mon = Monotonía
- Ext = Extremos
- Cort = Cortes con los ejes cartesianos
- Sign = Signo
- Cont = Continuidad
- Tend = Tendencia
- Perio = Periodicidad
- Sim= Simetría
- Curv = Curvatura

* Abreviaturas de los tipos de acción de aprendizaje:

- Apr = Aproximada
- Rig = Rigurosa
- Tab = Tabular
- P = Par números
- I = Intervalo
- Part = Particular
- Uni = Universal
- Des = Descriptiva

Se observa que no todos los conceptos los hemos interpretado en todas las representaciones de las funciones, porque los aprendizajes asociados al estadio autónomo están limitados por el curso educativo en el que se imparte la docencia. En concreto, el concepto de límite condiciona el desarrollo de los conceptos de continuidad, tendencia y curvatura, por tanto, no se alcanza un reconocimiento formal ni verbal riguroso. En su defecto, se plantea una descripción detallada de la representación gráfica del concepto de forma global.

3. UN EJEMPLO DE ENSEÑANZA. EL CONCEPTO DE SIGNO

A título de ejemplo, se presenta el diseño de enseñanza del concepto de signo, indicando las acciones concretas de aprendizaje que tienen lugar en cada uno de los estadios de desarrollo.

Para el desarrollo de la docencia siguiendo este marco, se considera que el sistema antiguo o conocimiento previo del alumno es el siguiente: ejes cartesianos y coordenadas de un punto; concepto de función como dependencia entre variables; interpretación gráfica; sentido positivo de los ejes cartesianos; notación de intervalos; la representación de punto relleno-punto vacío del lenguaje gráfico y su correspondencia con la notación de intervalos.

3.1. Estadio semiótico

Se distinguen y señalan sobre la gráfica los tramos donde la gráfica es positiva y los tramos donde es negativa. Este contenido se introduce de forma verbal aproximativa, de forma que el alumno adquiera una idea intuitiva del mismo que le permita interpretarlo en la gráfica de la función. Según la terminología de Socas (2007:36), en este estadio se producen los reconocimientos verbal y gráfico, conversiones y coordinaciones siguientes: $R_{V(Apr)}$, R_G, $C_{G\rightarrow V(Apr)}$, $C_{V(Apr)\rightarrow G}$, $C_{G\leftrightarrow V(Apr)}$.

. RV (Aproximado): Una expresión verbal aproximada que utiliza símbolos del sistema antiguo y es cercana a la intuición del alumno presenta el concepto.

. $C_{V(Apr)\rightarrow G}$: El reconocimiento verbal aproximado de los conceptos permite interpretarlos en la gráfica de la función.

. RG: Se reconoce el concepto en el sistema de representación gráfico y se interpretan las variaciones del mismo en este sistema de representación.

. $C_{G\rightarrow V(Apr)}$: La interpretación gráfica del concepto y sus variaciones se expresa de forma verbal aproximada.

. $C_{G\leftrightarrow V(Apr)}$: La interpretación verbal aproximada del concepto permite interpretarlo gráficamente y, recíprocamente, la interpretación gráfica del concepto se expresa de forma verbal aproximada.

3.2. Estadio estructural

Se obtienen intervalos gráficos sobre el eje de abscisas como resultado de la proyección de la gráfica sobre dicho eje, en función de las variaciones del signo. A continuación, se expresa dicha información mediante notación numérica de intervalos referida al eje de abscisas. Las acciones de aprendizaje ligadas a este estadio son: T_G, $C_{G\rightarrow N(I)}$, $R_{N(I)}$, y su significado:

. TG: Se realizan transformaciones internas en el sistema de representación gráfico. Se proyecta la gráfica en el eje de abscisas, en función del concepto o de las variaciones del concepto, obteniendo intervalos gráficos que ubican el concepto en el sistema de referencia cartesiano.

. $C_{G\rightarrow N(I)}$: Se realizan conversiones del sistema de representación gráfico al numérico. Se determinan los intervalos numéricos a partir de los intervalos gráficos obtenidos de la proyección de la gráfica en el eje de abscisas.

. RN (I): Se interpreta el concepto mediante los correspondientes intervalos numéricos de la recta real.

3.3. Estadio autónomo

Se plantea llegar a coordinar las representaciones gráfica y numérica, y gráfica y formal, ya sea a través de una expresión algebraica universal o una definición verbal rigurosa, por tanto, también se coordinan estas dos últimas representaciones. Asimismo, se produce el reconocimiento del concepto en la representación algebraica particular de la función. Consideramos que en este estadio se producen los reconocimientos, transformaciones, conversiones y coordinaciones siguientes: $R_{V(Rig)}$, $R_{A(Par)}$, $R_{A(Uni)}$, T_A, $C_{G\rightarrow V(Rig)}$, $C_{V(Rig)\rightarrow G}$, $C_{N(I)\rightarrow G}$, $C_{G\rightarrow A(Uni)}$, $C_{A(Uni)\rightarrow G}$, $C_{A(Par)\rightarrow N(I)}$, $C_{V(Rig)\rightarrow A(Uni)}$, $C_{A(Uni)\rightarrow V(Rig)}$, $C_{G\leftrightarrow V(Rig)}$, $C_{G\leftrightarrow N(I)}$, $C_{G\leftrightarrow A(Uni)}$, $C_{V(Rig)\leftrightarrow A(Uni)}$.

. $C_{N(I)\rightarrow G}$: Se dibuja la gráfica de una función sujeta a unas condiciones de ubicación del concepto o de sus variaciones, dadas por unos intervalos numéricos. Aunque, en primera instancia, se interpretan estos intervalos de forma gráfica en el eje de abscisas.

. $C_{G\rightarrow V(Rig)}$: Se realizan conversiones del sistema de representación gráfico al verbal. A partir de la representación gráfica del concepto se establece una expresión verbal que lo define con rigor.

. RV (Riguroso): Una expresión verbal define el concepto de forma rigurosa.

. $C_{V(Rig)\rightarrow G}$: Se reconoce el concepto formalmente a través de una expresión verbal rigurosa que lo define.

. $C_{G\rightarrow A(Uni)}$: La representación gráfica del concepto permite enunciar una expresión formal algebraica que lo define.

. RA (Universal): Se reconoce el concepto formalmente a través de una expresión algebraica universal que le define.

. $C_{A(Uni)\rightarrow G}$: La definición formal algebraica del concepto permite interpretarlo sobre la gráfica de la función.

. $C_{V(Rig)\rightarrow A(Uni)}$: Se realizan conversiones del sistema de representación verbal al algebraico. La definición verbal del concepto se expresa mediante una expresión algebraica formal.

. $C_{A(Uni)\rightarrow V(Rig)}$: La definición formal del concepto a través de una expresión algebraica se expresa verbalmente.

. RA (Particular): Se reconoce el concepto en la representación algebraica concreta de las funciones o se reconoce el procedimiento necesario para interpretar el concepto en dicha representación.

. TA: Se realizan transformaciones internas en el sistema de representación algebraico.

. $C_{A(Par)\rightarrow N}$: Se obtienen los intervalos numéricos o números reales que ubican el concepto según sus variaciones en el sistema de referencia cartesiano, a partir de la información que ofrece la representación algebraica de la función.

La Figura 1 presenta algunas acciones que se alcanzan en cada estadio de aprendizaje y la sucesión de estadios que tienen lugar en el aprendizaje de los conceptos. El estado semiótico, que es el inicial, está inmerso en el *sistema antiguo*, es decir en los conocimientos que el alumno ya posee. Los siguientes estadios siguen una línea ascendente y cada uno de ellos se fundamenta en el anterior.

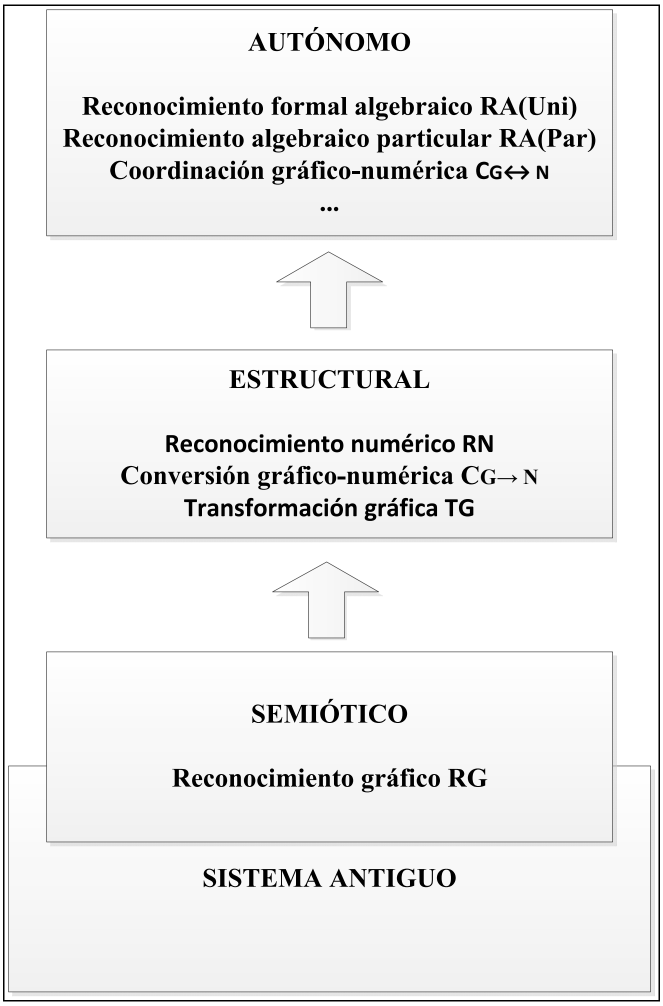


Figura 1. Estadios de aprendizaje y principales acciones de aprendizaje que tiene lugar en ellos.

4. ERRORES DE APRENDIZAJE DE LAS PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES

En este apartado, se hace una relación y se interpretan algunos errores que manifiestan los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de sus gráficas. Los errores y dificultades se han observado en la valoración del conocimiento previo de los alumnos (sistema antiguo) y en la valoración del aprendizaje (sistema nuevo) de los nuevos contenidos. Estos errores se han puesto de manifiesto en cuestionarios, el desarrollo de la docencia y en entrevistas con los alumnos.

Para presentar estos errores y consecuentes dificultades de aprendizaje, se hace una clasificación siguiendo el marco teórico ELOS. En primer lugar se presentan los errores asociados al conocimiento previo o sistema antiguo de los alumnos. En segundo lugar los errores en el aprendizaje de nuevo contenido que se distribuyen según los estadios semiótico, estructural y autónomo y se los asocia con una acción de aprendizaje.

Para ilustrar estos errores se presentan algunas transcripciones de las entrevistas realizadas y algunos escaneos de las respuestas escritas de los alumnos.

Sistema antiguo: Los errores en el conocimiento previo dificultan el aprendizaje de los nuevos contenidos.

* Errores relacionados con la interpretación de los símbolos y convenios del sistema de referencia cartesiano, y la representación de puntos en el plano.

- Se cambia la orientación positiva-negativa de los ejes cartesianos.
- Se lee el eje de abscisas en sentido contrario al convenido.
- Se lee el eje de ordenadas en sentido contrario al convenido, que es de abajo a arriba. Esto puede ser debido a que el sentido de lectura ordinario de un texto es de izquierda a derecha y de arriba abajo, y el alumno mantiene estos criterios en la lectura horizontal y vertical en los ejes cartesianos.

P: ¿En qué sentido se recorre el eje "Y"?, o sea, si tú te pones a leer…, a recorrer el eje de las "Y", hacia dónde vas, ¿hacia arriba o hacia abajo?

A: Hacia arriba o hacia abajo, depende de dónde vaya la gráfica…, no te entiendo la pregunta.

- Se cambia el orden en que se presentan las coordenadas en los pares de puntos. Puede ser un error debido a que se cambia la denominación de los ejes o a que no se relaciona un eje con otro en el sentido correcto.

* Errores en el uso de la notación de intervalos numéricos, la notación gráfica punto vacío-punto relleno y la correspondencia que hay entre ambas.

- Se observa el desconocimiento del significado del lenguaje gráfico punto relleno-punto vacío. Además, no se conoce la correspondencia entre intervalo abierto y punto vacío e intervalo cerrado y punto relleno. Este error se observa en el cálculo de imágenes y en la expresión de las propiedades de las funciones referidas al diagrama cartesiano.

P: ¡Ah! Y, ¿cuál es la imagen de cero?

A: Cero.

P: Hay punto vacío.

A: Entonces el…, no sé…

P: ¿qué significa el punto vacío?

A: Que no tiene imagen.

P: Muy bien, entonces, ¿la imagen de cero?

A: No tiene, ¿no?

* Desconocimiento del significado de la flecha sobre la gráfica que marca el comportamiento asintótico o las ramas de la función. Tendencia a leer o recorrer la gráfica siguiendo la flecha que aparece sobre ella y no utilizando los convenios del diagrama cartesiano. No se reconoce si la gráfica representada corresponde a una función finita o a una función infinita, algo necesario para referir correctamente las propiedades de la gráfica a los ejes cartesianos y para el cálculo de imágenes.

* Dificultades para expresarse utilizando términos y símbolos del lenguaje matemático como: *imagen*, *variable*, $\cup$, $\exists$, $\neg\exists$,…, por ejemplo, al indicar la existencia o no de la imagen de una abscisa. A veces, no se reconoce el lenguaje matemático, como en el caso de la notación funcional $y=f(x)$.

* Dificultades para distinguir entre la variable independiente y la dependiente y para saber en qué eje se representa cada una.

Sistema nuevo: Son errores que se observan en el aprendizaje del nuevo contenido. Estos errores se producen porque las acciones de aprendizaje que realizan los alumnos no son correctas. A cada uno de los errores detectados le denotamos anteponiendo una "E" a la acción correspondiente.

Estadio semiótico: Se producen errores en el reconocimiento gráfico de los conceptos, ER_G.

* Se interpreta la monotonía moviéndose por los puntos de la gráfica en los que hay un cambio de monotonía, en vez de considerar los tramos o intervalos de la gráfica en los que se manifiesta la propiedad. Se reducen los tramos o intervalos a puntos de la gráfica. Es un error en el reconocimiento gráfico de la propiedad, ER_G. Se manifiesta una tendencia a focalizar la atención en puntos de la gráfica o ciertos símbolos gráficos. Es una tendencia a la discretización de

la información de la gráfica frente a la interpretación global de la misma, a leer dato por dato o punto por punto. Este error ya fue señalado por Leinhardt et al. (1990) y Deulofeu (1995) en el análisis de la interpretación de gráficas contextualizadas por parte de los alumnos. Dolores (2004) también observa que los alumnos privilegian la ubicación de los puntos de la gráfica sobre su comportamiento de variación.

* Se señalan los extremos absolutos y no se señalan los relativos.

* No se reconocen los puntos finales de una gráfica finita como extremo.

* Se señala un máximo absoluto en una gráfica con una rama infinita ascendente.

P: ¿Por qué?, esta flecha, ¿qué significa?

A: Que tiende a infinito.

P: ¿Qué la gráfica sigue subiendo?

A: Sí.

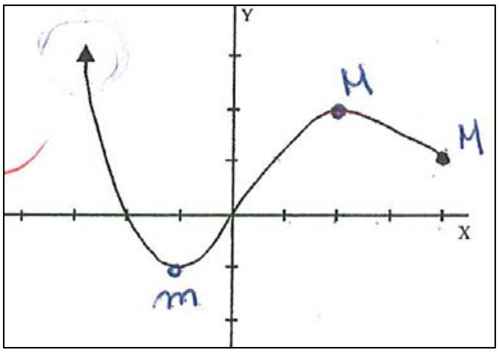
P: Entonces, ¿esto puede ser máximo absoluto?

A: Para mí sí…, vamos, ahí en el examen.

* En los extremos, las respuestas indican que los alumnos se fijan en puntos, y no en puntos y en un entorno de estos.

* Se observan errores por interpretar los extremos como puntos más altos o más bajos respecto al eje de abscisas, o también por su posición relativa respecto al eje de abscisas (por ejemplo: máximo por encima del eje y mínimo por debajo). Hay una focalización en los puntos y no en los puntos y un entorno de estos. Hay una interpretación intuitiva del concepto de extremos que lleva al error: se le relaciona con el concepto de altura respecto al eje de abscisas. El carácter intuitivo que aporta el término lingüístico con el que se denomina el concepto origina un conflicto de precisión (Socas 1997) en el aprendizaje del concepto.

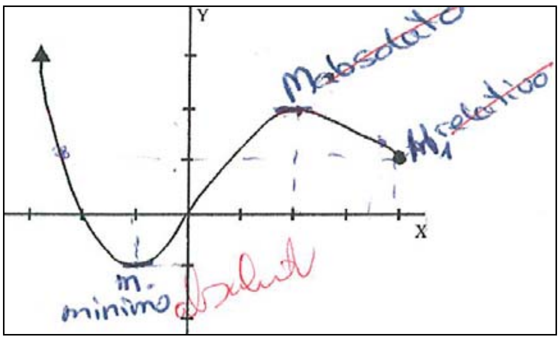
A1: Claro porque yo…, claro, cuando yo veo una gráfica, ¿no?, y veo unos puntos que sobrepasan al eje de las "X", pues el que veo más alto pues máximo absoluto y los que veo más inferiores a ese pues relativos.



……………………………………………

P: A ver el cuatro, el de los extremos, ¿por qué al punto (4,1)…, que es éste, ¿lo ves?,… le llamas máximo?, ¿por qué te parece que es un máximo?

A2: Porque está arriba del eje de las "X", ¿no?, sobre el eje que está más… Claro, yo me guié por esto, dije, anda, de aquí para arriba serán los máximos, y habrá máximo absoluto y máximo relativo, y de aquí para abajo, habrá los mínimos, ¿sabes?, por eso.



* Se utiliza el mismo criterio de extremo absoluto para los máximos y para los mínimos, "el más alto", lo que hace que el mínimo absoluto lo señalen como el más cercano al eje de abscisas y es erróneo.

* En las propiedades de la simetría y la curvatura, se observa que un importante número de alumnos cambia las denominaciones, par-impar, cóncavo-convexo, fundamentalmente debido a que se ha llevado a cabo un aprendizaje memorístico, carente de comprensión. ER_G.

* Dificultades para intuir el comportamiento de la gráfica de la función fuera del intervalo en que está representada, es decir, para indicar la tendencia de la función.

* Los siguientes errores manifiestan la confusión entre el comportamiento de la función y la ubicación de su gráfica. Advierten de la ausencia del razonamiento covariacional asociado al concepto de función, es decir, hay falta de coordinación de lo que ocurre con las dos variables a la vez (Dolores, 2004).

- Se asocia el signo positivo de la función con el crecimiento de las ordenadas, es decir, se asocia el signo de las ordenadas con la monotonía.
- Se asocia la propiedad de convexidad con la ubicación de la gráfica encima del eje de abscisas.
- En el caso de la tendencia, los errores son debidos a que no se interpreta simultáneamente el comportamiento de las abscisas y las ordenadas, se limitan a explicar el comportamiento de una de las variables, normalmente la de las abscisas.

Estadio estructural: Se produce el reconocimiento numérico en el diagrama cartesiano de la propiedad de la función. Los errores en este estadio ponen de manifiesto dificultades para realizar la transformación gráfica de proyección sobre los ejes ET_G y alcanzar la conversión de la representación gráfica a la numérica, ($EC_{G\rightarrow N(P,I)}$). El aprendizaje se limita al reconocimiento gráfico de la propiedad de la función.

* Errores al realizar la transformación gráfica o proyección de la gráfica sobre el eje de abscisas o el de ordenadas. ET_G. Por ejemplo, se dan las coordenadas de los puntos de la gráfica donde se produce un cambio de monotonía, pero no se proyecta los intervalos de monotonía. En el caso de la monotonía, las dificultades para pasar del estadio semiótico al estructural pueden ser debidas al fuerte carácter intuitivo-gráfico del concepto, que dificulta el desarrollo del pensamiento covariacional.

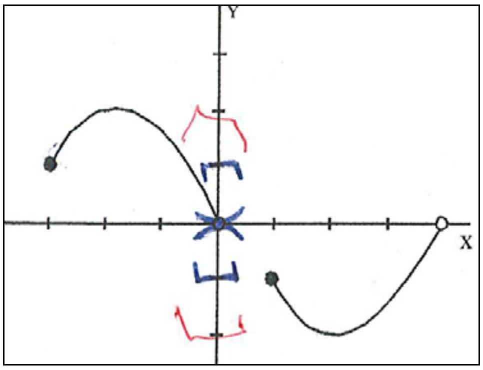
* Discretización: La focalización en un punto de la gráfica hace que se omita parte de su trazado y no se lleve a cabo correctamente la transformación gráfica T_G que permite la formación de intervalos que refieren la propiedad de la gráfica al diagrama cartesiano, por tanto, no se alcanza la correcta representación numérica del concepto. El símbolo gráfico ha dificultado el paso del estadio semiótico al estructural.

P: Pero, ¿qué es lo que te confundió?, ¿dónde miras?

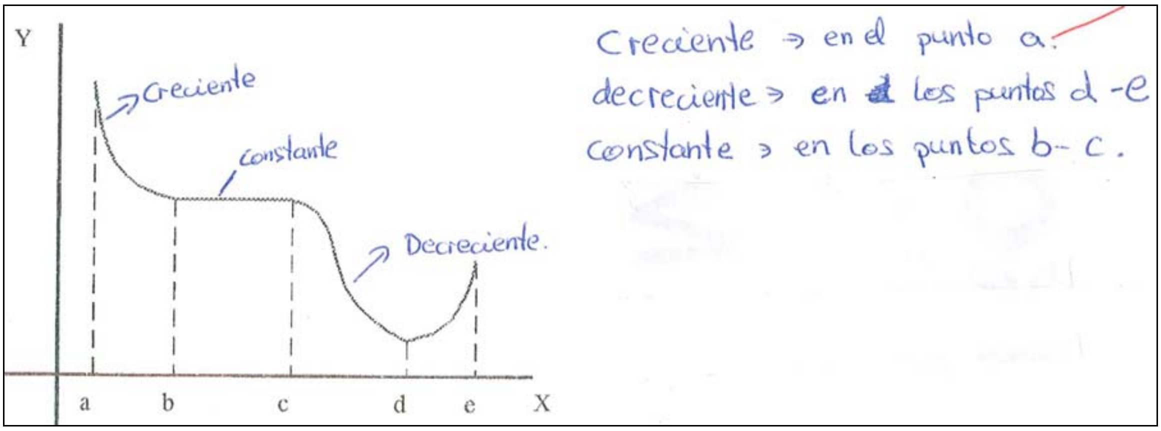
A: Claro, el punto, miré el punto.

P: ¿El negro?

A: Me fijé en el punto negro.



* Discretización: en vez expresar el origen y extremo de intervalos numéricos consideran la abscisa donde empiezan. (ER_N). En el siguiente escaneo se observan dos errores: la lectura del eje de abscisas en sentido contrario al convenido y la discretización de los intervalos numéricos.



* Discretización: El símbolo gráfico de la flecha focaliza la atención del alumno. Su forma y significado social hace que el alumno siga el trazado de la gráfica según el sentido que marca, lo que dificulta la acción de la transformación gráfica, ET_G y la formación de intervalos numéricos, $EC_{G \to N(I)}$.

* Representación numérica incompleta de los puntos de corte y de los extremos (ER_N).

* Errores en la formación de intervalos numéricos que refieren la propiedad a los ejes del diagrama cartesiano (ER_N).

- Se mezclan abscisas y ordenadas en los intervalos que refieren la propiedad al diagrama cartesiano. Esto es debido a que no se realiza bien el procedimiento de proyección ortogonal de la gráfica según las variaciones del concepto sobre el eje correspondiente, es decir, la transformación gráfica.
- Se cambia el orden de las abscisas, porque el sentido de lectura de la gráfica no es el correcto.

* No se sabe expresar de forma numérica la tendencia de la función a lo largo del eje de abscisas, se observa que se mezcla la tendencia de las abscisas con la de las ordenadas.

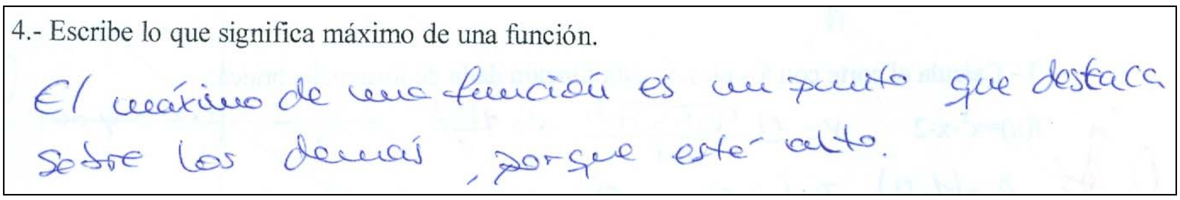
Estadio autónomo: Se coordinan las representaciones gráfica y numérica, y las representaciones gráfica y formal.

* Los errores de aprendizaje de los estadios anteriores ocasionan dificultades de aprendizaje y la consecución del estadio autónomo. Por ejemplo, si fallan aprendizajes del estadio estructural como la T_G y $C_{G \to N(I)}$, no se alcanza la conversión recíproca, $C_{N(I) \to G}$, asociada al estadio autónomo. En suma, se va acumulando la deficiencia de aprendizaje desde los primeros estadios.

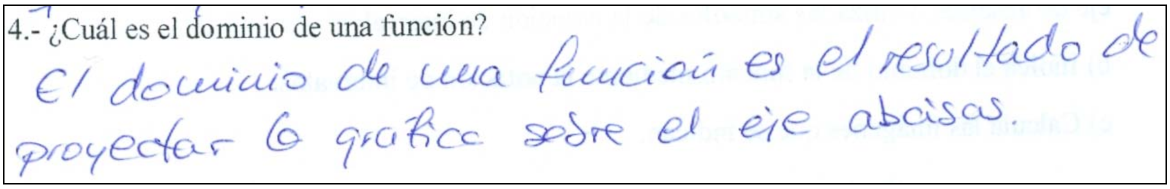
* No se dibuja correctamente la gráfica de una función caracterizada por una propiedad que está sujeta a unas determinadas condiciones de ubicación en la referencia cartesiana.

* Para trazar una gráfica con unas condiciones de monotonía dadas, se interpretan los intervalos numéricos como puntos del plano $EC_{N(I) \to G}$.

* Tendencia a la descripción gráfica del concepto en vez de dar su definición formal funcional. Esto indica que el alumno no se desliga del estadio semiótico o del estadio estructural para llegar al autónomo. Ejemplos de este caso nos lo muestra los siguientes escaneos.


4.- Escribe lo que significa máximo de una función.

El máximo de una función es un punto que destaca sobre los demás, porque esté alto.


4.- ¿Cuál es el dominio de una función?
El dominio de una función es el resultado de proyectar la grafica sobre el eje abcisas.

* Definiciones incompletas, debidas a un aprendizaje memorístico. $EC_{G \rightarrow A(Uni)}$ y $EC_{G \rightarrow V(Rig)}$.

* Definiciones formales algebraicas poco precisas. Normalmente se utiliza la notación de variables en vez de notación funcional y no aparecen todos los símbolos matemáticos que contiene esta representación del concepto. $EC_{G \rightarrow A(Uni)}$, $ER_{A(Uni)}$, $ER_{V(Rig)}$.

* En el caso del período, se manifiesta el carácter intuitivo del término linguítico, al asociar la variable independiente con la variable tiempo, en vez de con la variable longitud. Estaríamos ante una situación de confusión semántica (Socas, 1997), en el que el significado lingüístico del término no coincide con el significado matemático. $EC_{G \rightarrow V(Rig)}$.

* No se sabe utilizar el significado de período para calcular imágenes de la función fuera del intervalo en el que está representada. ET_N.

* Aprendizajes mecánicos y memorísticos de los procedimientos asociados a la representación algebraica de una función. Por ejemplo, en el cálculo del dominio de una función a través de su representación algebraica. (ET_A).

* Se observan dificultades para la comprensión de la simetría impar, y, por tanto, para el trazado de una función con simetría impar o doble simetría axial respecto a ambos ejes. $EC_{V(Aprox) \rightarrow G}$, ET_G.

5. CONCLUSIONES

El conocimiento de los errores pretende motivar estrategias didácticas para su prevención, lo que profundiza en el conocimiento del proceso de enseñanza de los conceptos. Por esta razón, es importante dar a conocer dónde y cómo se producen los errores en el aprendizaje de los conceptos con el fin de tratar de evitar el fracaso escolar que se produce en estos niveles educativos.

En general, predominan los aprendizajes del estadio semiótico, en el que la información se obtiene de forma directa de la gráfica, y aparecen importantes dificultades de aprendizaje al pasar del estadio semiótico al estructural, mediante una transformación gráfica. En el estadio autónomo predominan aprendizajes memorísticos y poco significativos de las definiciones de los conceptos, y hay dificultades para completar los aprendizajes asociados a este estadio debido a que los aprendizajes de los estadios anteriores no han sido adecuadamente adquiridos.

Habida cuenta de que la coordinación de representaciones se desarrolla desde las conversiones, y considerando que para que el aprendizaje de un concepto sea real es necesario que se produzca de forma espontánea la coordinación de dos representaciones de dicho concepto, la docencia debe favorecer todas las acciones que preceden a la coordinación o doble conversión, como los reconocimientos en los distintos sistemas de representación, las trasformaciones y las conversiones directas e inversas.

Por tanto, se propone una docencia estructurada que se desarrolle a través de las acciones de aprendizaje de reconocimiento, transformación, conversión y coordinación sobre las representaciones del concepto. Se parte del sistema de representación gráfico, que es el más intuitivo y cercano al alumno y, a partir de él, se sucederán los distintos sistemas de representación, hasta la formalización del concepto en su representación algebraica.

BIBLIOGRAFÍA

Astolfi, J.P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Díada.

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. 5ª ed. México: Siglo XXI Editores, S.A.

Bagni, G.T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa*, *7 (1)*, 5-23.

Brousseau G. (1983). Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques. *RDM*, *4 (2).*

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (95-124). Barcelona: ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y Horsori,

Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, *4*, 6-16.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7 (3)*, 195-218.

Dolores, C. y Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10 (1)*, 69-96.

Duval, R. (1993). *Sémiosis et Noésis*. Conférence A.P.M.E.P.I.R.E.M.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201) México: Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Grupo Editorial Iberoamericana.

Landsheere, G. de (1992). *Evaluation continue et examens. Précis de Docimologie.* Bruxelles : Labor. Education 2000

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60 (1)*, 1-64.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. e Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High Schools Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18 (1)*, 3-14.

Mulhern, G. (1989). Betwen the ears: Makin interferences about internal processes. En B. Greer y G. Mulhern (Eds.). *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

Radatz, H. (1979) Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education. 9*, 163-172.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Educación Matemática.* En J. Kilpatrick, P., Gómez y L. Rico (Eds.). Universidades de “Los Andes” Granada y Georgia: Grupo Editorial Iberoamericana S.A. de C.V. Bogotá

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje del las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.